

線形代数自学自習課題4 (行列の基礎と掃き出し法) 1/3

科目名	(解答例)	年次	年次	氏名	線形 三郎
学部・学類名		学籍番号			

1 (1) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 13 & -8 & 7 \end{pmatrix}$
 (3) 計算不可 (4) 計算不可
 (5) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$

2. (1) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mm} \end{pmatrix}$

と33。
 $(AB)C = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \dots + a_{1m}b_{m1} & \dots & a_{11}b_{1m} + \dots + a_{1m}b_{mm} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + \dots + a_{mm}b_{m1} & \dots & a_{m1}b_{1m} + \dots + a_{mm}b_{mm} \end{pmatrix} C$
 $= \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11} + \dots + a_{1m}b_{m1})c_{11} + \dots + (a_{11}b_{1m} + \dots + a_{1m}b_{mm})c_{m1} & \dots \\ \vdots & \ddots \\ (a_{m1}b_{11} + \dots + a_{mm}b_{m1})c_{11} + \dots & \dots \end{pmatrix}$

特に m 部の成分に着目すると

$(a_{11}b_{11} + \dots + a_{1m}b_{m1})c_{11} + \dots + (a_{11}b_{1m} + \dots + a_{1m}b_{mm})c_{m1}$
 $= (a_{11}b_{11}c_{11} + \dots + a_{1m}b_{m1}c_{11}) + \dots + (a_{11}b_{1m}c_{m1} + \dots + a_{1m}b_{mm}c_{m1})$
 $= a_{11} \underbrace{(b_{11}c_{11} + \dots + b_{1m}c_{m1})} + \dots + a_{1m} \underbrace{(b_{m1}c_{11} + \dots + b_{mm}c_{m1})}$

部分に着目すると,

$(b_{11} \dots b_{1m}) \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix}, \dots, (b_{m1} \dots b_{mm}) \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix}$

となり, m 部を再表記すると

$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1m} \end{pmatrix} \left((b_{11} \dots b_{1m}) \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix} \dots (b_{m1} \dots b_{mm}) \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix} \right)$

となる。すなわち, $(AB)C$ と $A(BC)$ の 1 行 1 列目の成分が等しいことがわかる。これを $(AB)C$ と $A(BC)$ の

科目名		年次	年次	氏名
学部・学類名		学籍番号		

全成分にわたり検証でき、よって $(AB)C = A(BC)$ の証明とする。

$$3.(1) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & 7 & 10 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 3 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & 2 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 17 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 17 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 17 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 17 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{15}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{34}{15} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{23}{15} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{17}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{15} \end{array} \right) \quad \text{Ans.} \\ x_1 = \frac{34}{15}, \quad x_2 = -\frac{23}{15}, \\ x_3 = \frac{17}{5}, \quad x_4 = \frac{1}{15}$$

科目名		年次	年次	氏名
学部・学類名		学籍番号		

$$3. (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 3 & 4 & -1 & | & 1 \\ 5 & 6 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & 2 & | & -2 \\ 0 & -4 & 4 & | & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \text{これより} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

$$x_2 = 1 + x_3$$

$$x_1 = -x_2 = -(1 + x_3) \text{ となり, } x_3 = C \text{ とおくと.}$$

$$x_2 = 1 + C$$

$$x_1 = -1 - C \text{ となる.}$$