線形代数 自学自習課題3（n次元複素数空間）

科目名	(解答例)	年次	年次	氏名	線形次郎
学部・学類名		学籍番号			

1. (1) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = (7i,\ 2+4i,\ -2-3i)$

(2) $(1+2i)\boldsymbol{u} = (-3+4i,\ -4+2i,\ 5)$

(3) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = (1+2i)\overline{(-1+5i)} + 2i\,\overline{(2+2i)} + (1-2i)\overline{(-3-i)}$

$= (1+2i)(-1-5i) + 2i(2-2i) + (1-2i)(-3+i)$

$= -1-2i-5i+10 \ +4i+4 \ -3+i+6i+2$

$= 12+4i$

(4) $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} = 12-4i$

(5) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = (1+2i)\overline{(1+2i)} + 2i\,\overline{(2i)} + (1-2i)\overline{(1-2i)}$

$= (1+2i)(1-2i) + 2i\cdot(-2i) + (1-2i)(1+2i)$

$= (1+4) + 4 + (1+4) = 14.$

$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}} = \sqrt{14}$ //

2. $u = (a+bi),\ v = (c+di) \in \mathbb{C}$

$uv = (ac-bd) + (bc+ad)i$

$|uv| = \sqrt{(ac-bd)^2 + (bc+ad)^2}$

$= \sqrt{a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2}$

$= \sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2}$

$= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$

$= \sqrt{(a^2+b^2)}\sqrt{(c^2+d^2)}$

$= |u|\,|v|$

3. (1) $\overline{u+v} = \overline{(a+bi)+(c+di)}$ $\left(\begin{array}{l} u = a+bi \\ v = c+di \end{array}\right)$

$= \overline{(a+c)+(b+d)i}$

$= (a+c)-(b+d)i$

$= (a-bi)+(c-di)$

$= \overline{u} + \overline{v}$

科目名		年次	年次	氏名	
学部・学類名		学籍番号			

(2) $\overline{u\,v} = \overline{(a+bi)(c+di)}$ $\quad\left(\begin{array}{l} u=a+bi \\ v=c+di \end{array}\right)$

$= \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}$

$= (ac-bd)-(ad+bc)i$

$= (a-bi)(c-di)$

$= \overline{u}\,\overline{v}$

4. 設問にまちがい有りです。
正しくは $u\cdot v = \overline{v\cdot u}$ の証明です。

$u=(u_1,\cdots,u_n),\ v=(v_1,\cdots,v_n)\in\mathbb{C}^n$

$u\cdot v = u_1\overline{v_1}+\cdots+u_n\overline{v_n}$

$= \overline{v_1}u_1+\cdots+\overline{v_n}u_n$

$= \overline{v_1\overline{u_1}}+\cdots+\overline{v_n\overline{u_n}}$ ただし $\overline{\overline{u_i}}=u_i$

$= \overline{v\cdot u}$ とする。

5. Minkowskiの不等式
$\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$ ただし $u,v\in\mathbb{R}^n$ とする。

(証明)

$\|u+v\|^2=\sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i)^2$

$=\sum_{i=1}^{n}|u_i+v_i|^2$

$=\sum_{i=1}^{n}|u_i+v_i||u_i+v_i| \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n}|u_i+v_i|(|u_i|+|v_i|)}$

等しい

$\sum_{i=1}^{n}|u_i+v_i||u_i|+\sum_{i=1}^{n}|u_i+v_i||v_i|$

一方，Cauchy-Schwarzの不等式は
$|x\cdot y|\leq\|x\|\|y\|$ であり、

科目名		年次	年次	氏名	
学部・学類名		学籍番号			

$|x\cdot y| \to \sum_{i=1}^{n}|u_i+v_i||u_i|$, $\|x\| \to \|u+v\|$
$\|y\| \to \|u\|$

と考えると、

$$\sum_{i=1}^{n}|u_i+v_i||u_i| \leqq \|u+v\|\,\|u\|$$

同様に

$$\sum_{i=1}^{n}|u_i+v_i||v_i| \leqq \|u+v\|\,\|v\|$$

を得る。

$$\|u+v\|^2 \leqq \sum_{i=1}^{n}|u_i+v_i||u_i| + \sum_{i=1}^{n}|u_i+v_i||v_i|$$
$$\leqq \|u+v\|\,\|u\| + \|u+v\|\,\|v\|$$
$$\leqq \|u+v\|(\|u\|+\|v\|)$$

上記の不等式を $\|u+v\|$ で割ると、次式を得る。

$$\|u+v\| \leqq \|u\|+\|v\|$$