線形代数 自学自習課題2（単位ベクトル，正規化，外積）

科目名		年次	年次	氏名	線形太郎
学部・学類名	（解答例）	学籍番号			

1. (1) $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=-\mathbf{v}\times\mathbf{u}$ の証明

$\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ とする。$n\neq 3$ のとき，外積と同様のものを定義できることもあるようだが，外積と言えば3次元空間内の幾何的な問題を解くための便利な概念である。
したがって，ここでは $n=3$ として証明を行うものとする。

$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$，$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ とする。

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}u_2&v_2\\u_3&v_3\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}u_3&v_3\\u_1&v_1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}u_1&v_1\\u_2&v_2\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}u_2v_3-u_3v_2\\u_3v_1-u_1v_3\\u_1v_2-u_2v_1\end{pmatrix}$$

$$=-\begin{pmatrix}v_2u_3-u_2v_3\\u_1v_3-u_3v_1\\u_2v_1-u_1v_2\end{pmatrix}$$

$$=-\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}v_2&u_2\\v_3&u_3\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}v_3&u_3\\v_1&u_1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}v_1&u_1\\v_2&u_2\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$=-\mathbf{v}\times\mathbf{u}$$

したがって $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=-\mathbf{v}\times\mathbf{u}$ となる。

2. (2) $-\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_3$ の証明

$$-\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_1=-\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1\cdot 0-0\cdot 0\\0\cdot 1-0\cdot 0\\0\cdot 0-(-1)\cdot 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$=\mathbf{e}_3$$

したがって $-\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_3$ となる。

科目名		年次	年次	氏名	
学部・学類名		学籍番号			

3、

(1) $(a \times b) \cdot c$

$$(a \times b) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6-0 \\ 0-3 \\ 1-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= -18 + 0 + 25$$

$$= 7 \text{〃}$$

(3) $(a \times b) \times c = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -15-0 \\ 15-(-30) \\ 0-(-9) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -15 \\ 45 \\ 9 \end{pmatrix} \text{〃}$$

4. (1) $\| u \| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$

uを正規化したものをu'とすると、

$$u' = \frac{1}{2\sqrt{5}}(2, 4)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \text{〃}$$

(2) $w = (w_1, w_2)$とする。

$u \cdot w = 0$ が直交の条件である。

したがって、 $2w_1 + 4w_2 = 0$ 　 $w_1 = -2w_2$

$w = (-2c, c)$である。ただし、cは任意の定数である。

(3) $\| w \| = \sqrt{c^2 + 4c^2} = \sqrt{5}\, c$

したがって wを正規化したものをw'とすると、

$$w' = \frac{1}{c\sqrt{5}}(-2c, c) = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \text{〃}$$

科目名		年次	年次	氏名	
学部・学類名		学籍番号			

(4)

$$\boldsymbol{v} = k_1 \boldsymbol{u} + k_2 \boldsymbol{w}$$

$$(5, -2) = k_1\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) + k_2\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\begin{cases} k_1 - 2k_2 = 5\sqrt{5} \\ 2k_1 + k_2 = -2\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\sqrt{5} \\ -2\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5\sqrt{5} \\ 2 & 1 & -2\sqrt{5} \end{pmatrix} \text{(拡大行列)} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5\sqrt{5} \\ 0 & 5 & -12\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5\sqrt{5} \\ 0 & 1 & -12/\sqrt{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & -12/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

したがって

$k_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $k_2 = -\frac{12}{\sqrt{5}}$ となる。