線形代数　自学自習課題1

科目名	n次元実数空間	年次	年次	氏名	線形太郎
学部・学類名	(解答例)	学籍番号			

1. (1) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ の証明

$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} &= ((u_1, \cdots, u_n)+(v_1, \cdots, v_n))+(w_1, \cdots, w_n) \\
&= (u_1+v_1, \cdots, u_n+v_n)+(w_1, \cdots, w_n) \\
&= (u_1+v_1+w_1, \cdots, u_n+v_n+w_n) \\
&= (u_1, \cdots, u_n)+(v_1+w_1, \cdots, v_n+w_n) \\
&= (u_1, \cdots, u_n)+((v_1, \cdots, v_n)+(w_1, \cdots, w_n)) \\
&= \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})
\end{aligned}$$

したがって $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ である。

2. (2) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = \mathbf{u}\mathbf{w}+\mathbf{v}\mathbf{w}$ の証明

$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} &= ((u_1, \cdots, u_n)+(v_1, \cdots, v_n))\cdot(w_1, \cdots, w_n) \\
&= (u_1+v_1, \cdots, u_n+v_n)\cdot(w_1, \cdots, w_n) \\
&= ((u_1+v_1)w_1+\cdots+(u_n+v_n)w_n) \\
&= (u_1w_1+v_1w_1+\cdots+u_nw_n+v_nw_n) \\
&= (u_1w_1+\cdots+u_nw_n)+(v_1w_1+\cdots+v_nw_n) \\
&= \mathbf{u}\mathbf{w}+\mathbf{v}\mathbf{w}
\end{aligned}$$

したがって $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = \mathbf{u}\mathbf{w}+\mathbf{v}\mathbf{w}$ である。

3. (1) $(2, -6, 14)-(5, -2, 7) = (-3, -4, 7)$

(2) $-2(-2, 1, 2, -\frac{2}{3}) = (4, -2, -4, \frac{4}{3})$

4. 内積 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (2\cdot1+4\cdot(-1)+(-1)\cdot2+(-2)\cdot1)$

$$\begin{aligned}
&= 2-4-2-2 \\
&= -6
\end{aligned}$$

ノルム $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2^2+4^2+(-1)^2+(-2)^2}$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{4+16+1+4} \\
&= 5
\end{aligned}$$

$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1^2+(-1)^2+2^2+1^2}$

科目名		年次	年次	氏名	
学部・学類名		学籍番号			

$= \sqrt{1+1+4+1}$

$= \sqrt{7}$.

5. u と v が直交するとき $u \cdot v = 0$ が成立する。

したがって $(2, 4, k, -2) \cdot (1, 3k, 2, 1) = 0$ となる。

$2 + 12k + 2k - 2 = 0$

$14k = 0$　　$k = 0$ である。

以上 回答例でした。