平成２０年度　線形代数　中間試験　担当：樋口良之

学籍番号

氏　　名

注意：試験問題は両面に記述されている．
薄い記述，ていねいではない記述は，採点の対象とならない．

問１　$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{b}'\in\mathbf{R}^3$、$c_1,c_2\in k$ とするとき、$\mathbf{a}\times(c_1\mathbf{b}+c_2\mathbf{b}')=c_1(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+c_2(\mathbf{a}\times\mathbf{b}')$ が成立することを証明しなさい。

問２　$\theta \in \mathbf{R}$ とし、$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ と表すとき、$A(\alpha+\beta) = A(\alpha)A(\beta)$ が成立することを証明しなさい。ヒント：積を和（差）に直す公式　$\sin a \cos b = (\sin(a+b) + \sin(a-b))/2$、
$\cos a \sin b = (\sin(a+b) - \sin(a-b))/2$、$\cos a \cos b = (\cos(a+b) + \cos(a-b))/2$、
$\sin a \sin b = -(\cos(a+b) - \cos(a-b))/2$、
和（差）を積に直す公式　$\sin a + \sin b = 2\sin((a+b)/2)\cos((a-b)/2)$、
$\sin a - \sin b = 2\cos((a+b)/2)\sin((a-b)/2)$、$\cos a + \cos b = 2\cos((a+b)/2)\cos((a-b)/2)$、
$\cos a - \cos b = -2\sin((a+b)/2)\sin((a-b)/2)$
加法定理　$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$、$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$

問３　$A=\begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$の逆行列を求めなさい。逆行列が存在しない場合には、「逆行列は存在しない」と解答しなさい。また、Aは、正則行列であるか、正則行列ではないかを判定しなさい。

（解答１）逆行列を求めなさい。

（解答２）適切な回答を○で囲みなさい。

・逆行列が存在するので正則行列である。

・逆行列が存在するので正則行列ではない。

・逆行列が存在しないので正則行列である。

・逆行列が存在しないので正則行列ではない。

・正方行列であるので正則行列である。

・転置行列が存在せず正則行列でない。

・転置行列が存在し正則行列である。

・拡大行列が存在せず正則行列でない。

問４　次の数式、文章の（　）内の空欄を埋めて、解説文を完成させなさい。英語表記の解答にあっては、枠内から選択しなさい。

連立１次方程式$\begin{cases} x+2y-w=-1 \\ -x+y+2y=3 \\ 2x+z+w=8 \\ x-2y-z+w=2 \end{cases}$は、行列で表現すると次のように変換される。

$$\underbrace{\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}}_{①}\underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}}_{②}=\underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}}_{③} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad （１）$$

下線①は（　　　　　）であり、英語では（　　　　　　　　　　　　　）と表記する。下線②は（　　　　　）であり、英語では（　　　　　　　　　　　　　）と表記する。下線③は（　　　　　）といい、英語では（　　　　　　　　　　　　　）と表記する。この連立１次方程式の解を掃きだし法によって得るために、次の拡大行列を作成する。

$$\left(\begin{array}{cccc|c} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right)$$

英語選択肢
regular, scalar, vector, inner product, norm, length, Cauchy-Schwarz, variable, constant term, coefficient, solution, inverse, block

問５　次の計算をしなさい。

$$\begin{pmatrix} 1+i & 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$