

学籍番号 _____

氏 名 _____

注意：試験問題は両面に記述されている。
薄い記述，ていねいではない記述は，採点の対象とならない。

1. $W = \{(1, 1, 2), (1, 2, 5), (5, 3, 4)\}$ の3つのベクトルは R^3 空間を基底できない。 $\dim(W)$ を求めなさい。また、3つのベクトルのうちから基底となる2つのベクトルを選び、さらに標準基底を1つ追加して、 R^3 空間の基底ベクトル3つを示しなさい。

2. 写像 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 - x_3)$ が線形写像であることを証明しなさい。

3. R^3 の空間において、 $U = \{(a, b, 0) \mid a, b \in R\}$ と $W = \{(0, 0, c) \mid c \in R\}$ の2つのベクトル群がある。 U と W は直和であるか、ないかを証明しなさい。

4. 以下の破線四角部分に適切な数式や単語を入れて解説文を完成させなさい。

直線の方程式を $y = ax + b$ と表現する。この方程式を行列で表現すると、 $(y) = \left[\begin{array}{c} () \\ () \end{array} \right] \left(\begin{array}{c} () \\ () \end{array} \right)$ となる。

xy 平面上の2点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を用いて行列で表現すると、

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c} () \\ () \end{array} \right] \left(\begin{array}{c} () \\ () \end{array} \right)$ となり、 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c} () \\ () \end{array} \right]^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ へと変形できる。

5. 以下の破線四角部分に適切な数式や単語を入れ、 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めなさい。

固有値 $\boxed{\quad}$ と固有ベクトル $\boxed{\quad}$ の間には、次式が成立する。

$$Ax = \lambda x \quad (1)$$

式(1)を変形し、次式を得る。

$$\boxed{\quad} x = 0 \quad (2)$$

ここで、 E は $\boxed{\quad}$ 行列である。式(2)は、連立方程式である。これが自明な解($x=0$)以外の解を持つためには、式(2)の係数にあたる部分の行列が正則でなければよい。正則でないということは、逆行列が存在せず、係数部分にあたる行列の行列式がゼロとなる。すなわち、次式が成立する。

$$|A - \lambda E| = 0 \quad (3)$$

式(3)を用いて、 λ を導出する過程を次に示す。

$\lambda = \boxed{\quad}$ のときの固有ベクトル x は、 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boxed{\quad}$ となり、その導出過程は次のとおりである。

また、 $\lambda = \boxed{\quad}$ のときの x は、 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boxed{\quad}$ となり、その導出過程は次のとおりである。

通常、ベクトル x に係数行列 A を乗じて Ax のようになると、 Ax は x とは異なる $\boxed{\quad}$ や $\boxed{\quad}$ になる。しかし、 x が固有ベクトルのとき、 Ax は x とは異なる $\boxed{\quad}$ になることもあるが、 $\boxed{\quad}$ は変わらない。

6. 線形結合あるいは線形関係式を用いて、線形従属と線形独立の定義を示しなさい。